УДК 517.518.86+519.147

Д. В. Штром

МЕТОД ДЕЛЬСАРТА В ЗАДАЧЕ ОБ АНТИПОДАЛЬНЫХ КОНТАКТНЫХ ЧИСЛАХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ БОЛЬШИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ*

1. Введение. Постановка задачи

В работе изучается экстремальная задача на классе непрерывных на отрезке функций, представимых рядами по ультрасферическим многочленам, с ограничениями на значения функций и коэффициенты разложений, которая возникает при применении схемы Дельсарта в задаче о максимальной мощности антиподальных сферических s-кодов евклидовых пространств $\mathbb{R}^m$.

Схема Дельсарта впервые возникла в работах [1,2] при исследовании границ упаковок в некоторых метрических пространствах. В дальнейшем эта схема была развита и успешно применена в работах Г. А. Кабатянского и В. И. Левенштейна [3], Э. Одлыжко и Н. Слоэна [4], В. И. Левенштейна [5–7], В. М. Сидельникова [8], В. А. Юдина [9], П. Г. Бойваленкова [10], П. Г. Бойваленкова, Д. П. Данева и С. П. Бумовой [11], В. В. Арестова и А. Г. Бабенко [12, 13], а также других авторов, в связи с исследованиями оптимального в том или ином смысле расположения точек в метрических пространствах и, в частности, контактных чисел евклидовых пространств $\mathbb{R}^m$. Схема Дельсарта приводит к задаче бесконечномерного линейного программирования (мы будем называть ее задачей Дельсарта), значение которой дает оценку сверху для исходной задачи. Нас интересует задача Дельсарта, связанная со сферическими s-кодами в $\mathbb{R}^m$. В своей работе В. М. Сидельников использовал впервые в данной тематике квадратурную формулу типа Гаусса–Маркова, в которой задействованы только значения функции. Эту квадратурную формулу он применил для доказательства экстремальности многочленов Левенштейна на классе многочленов такой же или меньшей степени. В работе П. Г. Бойваленкова, Д. П. Данева и С. П. Бумовой [11] был доказан критерий экстремальности многочленов Левенштейна в задаче о максимальной мощности сферического s-кода. В работе П. Г. Бойваленкова, Д. П. Данева [14] этот критерий был

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 02–01–00783), РФФИ–ГФЕН Китая (проект № 02–01–39007) и президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-1347.2003.1).

обобщен, что сделало возможным использование данного критерия для установления значений параметров s и m, при которых многочлены Левенштейна являются экстремальными и в задаче о нахождении максимальной мощности антиподального s-кода (антиподального контактного числа). Используя данный критерий, П. Г. Бойваленков и Д. П. Данев установили неэкстремальность многочленов Левенштейна для некоторых значений параметров s и m, однако им не удалось установить экстремальность многочленов Левенштейна. В. В. Арестов и А. Г. Бабенко [12], по существу, сконструировали квадратурную формулу, в которой задействованы не только значения функций, но и их коэффициенты Фурье–Якоби. На этом пути им удалось, в частности, решить задачу Дельсарта в случае $s = 1/2$, $m = 4$; аналогичным методом в работе [15] задача Дельсарта была решена при $s = 1/3$, $m = 4, 5, 6$. Автор [16] применил этот метод для нахождения решения задачи Дельсарта при $s = 1/2$ и следующего диапазона значений m :

$$5 \le m \le 146,\ 148 \le m \le 156,\ m = 161\ (m \ne 8, 24).$$

Пусть $\mathbb{R}^m$ – вещественное евклидово пространство размерности $m \ge 2$ с обычным скалярным произведением $xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_my_m$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, x_2, \ldots, y_m)$, и нормой $|x| = \sqrt{xx}$, $x, y \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\mathbf{B}^m(y) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - y| \le 1\}$ – шар единичного радиуса с центром в точке $y \in \mathbb{R}^m$. Обозначим через τ_m максимальное число τ шаров $\mathbf{B}^m(y^{(1)})$, $\mathbf{B}^m(y^{(2)})$, $\ldots$, $\mathbf{B}^m(y^{(\tau)})$ единичного радиуса, не имеющих общих внутренних точек ($|y^{(i)}| = 2$, $i = 1, 2, \ldots, \tau$; $|y^{(i)} - y^{(j)}| \ge 2$, $i \ne j$), которые касаются шара $\mathbf{B}^m(0)$. Величину τ_m называют *контактным числом* пространства $\mathbb{R}^m$.

В настоящее время известны (см. [17, табл. 1.5; гл. 1]) значения величины τ_m лишь при $m = 2$, 3, 8, 24, а именно $\tau_2 = 6$, $\tau_3 = 12$, $\tau_8 = 240$, $\tau_{24} = 196560$. В общем случае имеются двусторонние оценки этой величины. Если на расположение шаров наложить дополнительное ограничение симметричности расположения шаров относительно нуля, получится не менее интересная задача о нахождении *антиподального контактного числа* τ_m^A, которая связана (см., например, [9]) с классической задачей о максимальном количестве целых точек на эллипсоиде. Об этих задачах известно несколько больше. В частности, известно, что $\tau_2^A = 6$, $\tau_3^A = 12$, $\tau_4^A = 24$, $\tau_5^A = 40$, $\tau_6^A = 72$, $\tau_7^A = 126$, $\tau_8^A = 240$, $\tau_{24}^A = 196560$. Более того, 24 является максимальной размерностью, в которой вычислены точно эти величины. При $m > 24$ известны только двухсторонние оценки этих величин. Однако известные оценки не дают, к примеру, порядок роста ни τ_m, ни τ_m^A при $m \to \infty$.

Конкретные конструкции расположения шаров дают оценки снизу для τ_m^A и τ_m; существует также неконструктивный способ оценки снизу τ_m^A. В данной работе оценки снизу величины τ_m^A не рассматриваются; соответствующую информацию и библиографию можно найти в процитированной уже монографии [17]. Эффективную оценку сверху τ_m^A дает подход Дельсарта; мы изложим его в более общей ситуации для задачи о максимальной мощности антиподальных сферических s-кодов евклидовых пространств $\mathbb{R}^m$.

Пусть $\mathbf{S}^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ – единичная сфера пространства $\mathbb{R}^m$. Следуя в основном [19], введем обозначения. Для множества $W \subset \mathbf{S}^{m-1}$, содержащего не менее двух точек, обозначим через $\mathcal{A}(W)$ множество всевозможных значений скалярного произведения различных векторов x, y из W:

$$\mathcal{A}(W) = \{xy : \quad x \neq y,\ x, y \in W\}.$$

Множество $W \subset \mathbf{S}^{m-1}$ со свойством $\mathcal{A}(W) \subset [-1, s]$ называется *сферическим s-кодом.*

Множество $W \subset \mathbf{S}^{m-1}$ называется *центрально симметричным,* если для любой точки x из этого множества точка $-x$ также принадлежит ему.

Множество $W \subset \mathbf{S}^{m-1}$, являющееся одновременно центрально симметричным и сферическим s-кодом, называется *антиподальным сферическим s-кодом.*

Обозначим через $\mathcal{W}_m^A(s)$ множество всех антиподальных сферических s-кодов из $\mathbf{S}^{m-1}$, а через $N_m^A = N_m^A(s)$ – максимально возможную мощность антиподального сферического s-кода, т. е. положим

$$N_m^A(s) = \max\{\mathrm{card}(W) : \ W \in \mathcal{W}_m^A(s)\}. \tag{1}$$

Нетрудно понять, что величина $N_m^A(1/2)$ совпадает с τ_m^A :

$$\tau_m^A = N_m^A(1/2), \quad m \geq 2. \tag{2}$$

Из того что антиподальный сферический s-код является сферическим s-кодом, следует тривиальная связь между τ_m и τ_m^A, а именно

$$\tau_m^A \leq \tau_m.$$

Пусть $R_k = R_k^{\alpha,\alpha},\ k = 0, 1, 2, \ldots$, есть система ультрасферических многочленов (многочленов Гегенбауэра), ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-t^2)^\alpha$, $\alpha = (m-3)/2$, нормированных условием $R_k(1) = 1$. Обозначим через $\mathcal{F}_m^A = \mathcal{F}_m^A(s),\ s \in [0, 1)$, множество непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций f со свойствами:

1) функция f представляется в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} R_{2k}(t), \tag{3}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

$$f_0 > 0, \quad f_{2k} \geq 0, \; k = 1, 2, \ldots, \quad f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} < \infty; \tag{4}$$

2) функция f – неположительная на отрезке $[-s, s]$:

$$f(t) \leq 0, \quad t \in [-s, s]. \tag{5}$$

На этом множестве функций рассматривается задача Дельсарта о вычислении величины

$$w_m^A(s) = \inf \left\{ \frac{f(1) + f(-1)}{f_0} : \; f \in \mathcal{F}_m^A(\mathrm{s}) \right\} = \inf \left\{ \frac{2\, f(1)}{f_0} : \; f \in \mathcal{F}_m^A(\mathrm{s}) \right\}; \tag{6}$$

эту величину условимся называть константой (функцией) Дельсарта.

В работе В. В. Арестова и А. Г. Бабенко [12] была доказана конечность разложения (3) экстремальной в задаче (6) функции, т. е. было доказано что функция, на которой в задаче (6) достигается минимум, является многочленом. При этом, используя [12, следствие 2.2], поточечные оценки для многочленов $R_{2k}(t)$ на $[-s, s]$ (например, можно использовать лемму 2.1 из [16]), а также универсальную оценку сверху В. И. Левенштейна для $w_m^A(s)$, можно найти эффективную оценку сверху степени экстремального многочлена.

Следующее утверждение содержится в работе [9]. Оно дает оценку сверху числа $N_m^A(s)$, а значит, и числа τ_m^A (см. (2)), через величину (6).

Теорема A. *При любых $s \in [0, 1)$, $m = 2, 3, \ldots$ справедливо неравенство*

$$N_m^A(s) \leq w_m^A(s). \tag{7}$$

Поскольку N_m^A является четным числом, то из этой теоремы следует, что

$$N_m^A(s) \leq [w_m^A(s)]_2, \quad s \in [0, 1), \quad m = 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

где $[t]_2$ – максимальное четное число, не превосходящее t.

Задача о нахождении максимальной мощности антиподальных сферических кодов рассматривалась в работах [6,7,10,18]. В работе В. И. Левенштейна была получена хорошая оценка сверху величины w_m^A, и, как будет показано ниже в данной работе, для достаточно большого количества значений m эта оценка неулучшаемая с помощью метода Дельсарта. В работах [14, 18] были установлены необходимые и достаточные условия экстремальности многочленов Левенштейна в задаче Дельсарта. С использованием этого критерия в работе [18] был установлен ряд значений параметров s и m, при которых многочлен Левенштейна не является экстремальным многочленом в задаче Дельсарта, и для этих значений параметров s и m оценка Левенштейна была несколько улучшена. Однако, к сожалению, ни в этой работе, ни в более ранних экстремальность многочленов Левенштейна (соответствующие достаточные условия) не рассматривалась. Исключение составляют только те случаи, когда оценка сверху совпадает с известной оценкой снизу. В этих случаях экстремальность многочленов Левенштейна получается автоматически (например при $s = 1/2$ и $m = 2, 4, 6, 7, 8, 24$).

Нас интересует значение параметра $s = 1/2$. Введем обозначение

$$w_m^A = w_m^A(1/2).$$

В данной работе сделано следующее.

1. Вычислены точные значения константы Дельсарта w_m^A для большого числа значений параметра m, а именно для всех натуральных чисел $3 \leq m \leq 99$ ($m \neq 4, 6, 7, 8, 24$), $104 \leq m \leq 122$, $125 \leq m \leq 134$, $136 \leq m \leq 145$, $147 \leq m \leq 156$, $m = 161$. Найдены соответствующие экстремальные многочлены. Заметим, что многочлены вида 1 и 2 (см. п. 4) являются (с точностью до замены переменной) многочленами, полученными в работе В. И. Левенштейна [7]. Для всех этих значений параметров m требовалось фактически только проверить достаточные условия экстремальности многочленов Левенштейна в задаче Дельсарта, что и было проделано. Соответствующие результаты приведены в табл. 1. Кроме того, были найдены экстремальные многочлены, отличные от многочленов Левенштейна. Это многочлены вида 3 и 4 (см. п. 4). Соответствующие результаты приведены в табл. 2.

2. Дано подробное доказательство для случая $m = 43$. Остальные результаты приведены в таблице без детального обоснования ввиду громоздкости соответствующих выкладок. Однако по имеющейся в таблице информации можно провести вычисления при любом из указанных значений m аналогично тому, как это сделано при $m = 43$.

На сегодняшний день известно несколько значений параметров s и m, когда $w_m^A(s)$ является целым и совпадает с $N_m^A(s)$. Например, при $s = 1/2$ и m, равном $2, 4, 6, 7, 8, 24$. Но верно ли обратное? И совпадает или нет $N_m^A(s)$ хотя бы с $[w_m^A(s)]_2$? Используя результаты работы П. Г. Бойваленкова [10] и данной работы, можно ответить на этот вопрос: данные величины, вообще говоря, не равны. Например, $\tau_5^A = N_5^A(1/2) = 40$, а $w_5^A = 42$. Известно также [10], что $\tau_{10}^A \leq 548$, $\tau_{14}^A \leq 2938$, в то время как $w_{10}^A = 550$ и $w_{14}^A = 2940$. Таким образом, имеем $\tau_m^A < [w_m^A]_2$ при $m = 5, 10, 14$.

2. Метод исследования задачи Дельсарта

Ниже в нашей статье мы будем во многом следовать схеме рассуждений работ [12, 13, 15, 16]. Данная работа по методам исследования и характеру результатов близка работе автора [16].

Пусть A – линейный оператор из пространства $\ell = \ell_1$ суммируемых последовательностей $x = \{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ вещественных чисел в пространство $C[-1,1]$, непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций, определенный формулой

$$(Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k} R_{2k}(t), \quad t \in [-1,1], \ x = \{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty} \in \ell.$$

Положим

$$u_m^A(s) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k} : \ x_{2k} \geq 0; \ 1 + (Ax)(t) \leq 0, \ t \in [-s,s] \right\}. \tag{9}$$

В задаче (6) можно ограничиться функциями $f \in \mathcal{F}_m^A$, у которых $f_0 = 1$. Для такой функции введем обозначение $x = \{f_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$; имеем $f(t) = 1 + (Ax)(t)$ и $f(1) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{2k}$. Отсюда можно сделать вывод, что величины (6) и (9) связаны равенством

$$w_m^A(s) = 2 + 2u_m^A(s). \tag{10}$$

Задачи (6),(9) являются задачами бесконечномерного линейного программирования (см., например, [20]). С помощью этих соображений в работе [12] было доказано существование решений (экстремальных функций) задачи более общей, чем (6), и соответствующей двойственной задаче.

Обозначим через Φ_m^A множество четных функций $f \in C[-1,1]$, представимых рядами по ультрасферическим многочленам $R_{2k} = R_{2k}^{\alpha,\alpha}$, $\alpha = (m-3)/2$, с (абсолютно) суммируемой последовательностью вещественных коэффициентов:

$$\Phi_m^A = \Big\{ f \in C[-1,1] : \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} R_{2k}(t), \quad \sum_{k=0}^{\infty} |f_{2k}| < \infty \Big\}. \tag{11}$$

Очевидно, что $\mathcal{F}_m^A \subset \Phi_m^A$.

Далее рассматривается лишь случай $s = 1/2$. Для решения задачи (6) для каждого значения m была построена своя квадратурная формула на классе функций $f \in \Phi_m^A$, содержащая не только значения функции, но и коэффициенты Фурье $f_{2\nu}$ разложения функции $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}R_{2k}(t)$ в ряд по многочленам R_{2k}. Точнее, эта формула имеет вид

$$f_0=\frac{1}{\vartheta(\alpha)}\int_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)^{\alpha}dt=L(f)-\sum_{\nu\geq 1}L(R_{2\nu})f_{2\nu}, \tag{12}$$

где

$$\vartheta(\alpha)=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha}dt, \quad \alpha=(m-3)/2,$$

и функционал L задан соотношением

$$L(f)=\lambda(1)f(1)+\lambda\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)+\lambda(t_1)f(t_1)+\ldots+\lambda(t_{k(m)})f(t_{k(m)}), \tag{13}$$

где узлы $t_1,t_2,\ldots,t_{k(m)}$ лежат в полуинтервале $[0,1/2)$, коэффициенты $\lambda\left(\frac{1}{2}\right)$, $\lambda(t_1)$, $\lambda(t_2),\ldots,\lambda(t_{k(m)})$ и значения $L(R_{2\nu})$, $\nu\geq 1$, функционала L на многочленах $R_{2\nu}$ неотрицательные. Одновременно с квадратурной формулой (12) строится многочлен $f^*\in\mathcal{F}_m^A$ так, чтобы выполнялось равенство

$$f_0^*=\frac{1}{\vartheta(\alpha)}\int_{-1}^{1} f^*(t)(1-t^2)^{\alpha}dt=\lambda(1)f^*(1). \tag{14}$$

При выполнении этих условий значением задачи (6) (при $s=1/2$) будет являться отношение $2/\lambda(1)$, т. е. будет иметь место равенство

$$w_m^A=\frac{2}{\lambda(1)}. \tag{15}$$

Действительно, для любой функции $f\in\mathcal{F}_m^A$ в силу формулы (12) и неотрицательности коэффициентов квадратурной формулы справедливо соотношение

$$f_0=L(f)-\sum_{\nu\geq 1}L(R_{2\nu})f_{2\nu}\leq L(f)\leq\lambda(1)f(1).$$

Таким образом, для любой функции $f\in\mathcal{F}_m^A$ выполняется неравенство

$$\frac{f(1)}{f_0}\geq\frac{1}{\lambda(1)}, \tag{16}$$

а значит и неравенство

$$w_m^A\geq\frac{2}{\lambda(1)}. \tag{17}$$

На многочлене f^* неравенство (16) обращается в равенство. Следовательно, неравенство (17) на самом деле является равенством, т. е. имеет место (15). При этом многочлен f^* будет обладать свойством $w_m^A = 2\,f^*(1)/f_0^*$, т. е. является решением (экстремальной функцией) задачи (6). Функционал L определяется мерой, которая является решением двойственной задачи.

Условие (14) накладывает достаточно жесткие ограничения на многочлен

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{n(m)} f_{2k}^* R_{2k}(t) \tag{18}$$

и квадратурную формулу (13). А именно, должны быть выполнены следующие условия:

(a) все узлы t_ν функционала L (кроме узла $t = 1$) лежат на отрезке $[0, 1/2]$ и являются нулями функции f^*, причем каждый нуль из полуинтервала $[0, 1/2)$ имеет по крайней мере двойную кратность;

(b) при $k \geq 1$ коэффициенты f_{2k}^* представления (18) функции f^* и значения $L(R_{2k})$ функционала (13) на полиномах R_{2k} связаны соотношением $f_{2k}^*\, L(R_{2k}) = 0$;

(c) сумма весов функционала L равна 1, т. е.

$$L(R_0) = \lambda(1) + \lambda\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda(t_1) + \lambda(t_2) + \ldots + \lambda(t_{k(m)}) = 1.$$

Помимо того должны выполняться следующие условия, обеспечивающие неотрицательность функционала L и принадлежность многочлена f^* классу:

(d) веса $\lambda(t_\nu)$ функционала L должны быть неотрицательными и $\lambda(1) > 0$;

(e) функционал L на всех многочленах R_{2k}, $k \geq 1$, имеет неотрицательные значения: $L(R_{2k}) \geq 0$, $k \geq 1$;

(f) многочлен f^* должен принадлежать классу $\mathcal{F}_m^A$, т. е. должна иметь неотрицательные коэффициенты f_{2k}^*, $k \geq 1$, $f_0^* > 0$ и должно выполняться условие $f^*(t) \leq 0$ при $t \in [-1/2, 1/2]$.

Во всех случаях, когда задача (6) решена точно, точка $t = 1/2$ является корнем этого многочлена, причем кратности 1. Для построения многочлена f^* важную роль имеет априорная информация о его структуре: степень, номера зануляющихся коэффициентов в разложении (18), количество (кратных) нулей многочлена на интервале $(-1/2, 1/2)$, является ли точка 0 корнем этого многочлена. Информацию о виде экстремальной функции приходится выяснять отдельно, чаще всего просто угадывать, основываясь на каких-то соображениях, например на предварительном численном эксперименте. Если эта информация уже получена, то экстремальный многочлен f^* и функционал L строятся следующим образом.

Условия (a), (b), (c) дают систему (нелинейных) уравнений для узлов $\{t_i\}$ функционала (13), принадлежащих отрезку $[0, 1/2]$ и являющихся одновременно нулями функции f^*, для коэффициентов $\{f^*_{2k}\}$ функции (многочлена) (18) и для весов $\{\lambda(t_i)\}$ функционала (13). Как правило, решение системы не единственное. Мы должны выбрать решение, удовлетворяющее перечисленным выше условиям (d), (e), (f).

3. Виды экстремальных функций

В данной работе найдена величина $w_m^A = w_m^A(1/2)$ для значений параметра m, удовлетворяющих условиям $3 \le m \le 99$, $104 \le m \le 122$, $125 \le m \le 134$, $136 \le m \le 145$, $147 \le m \le 156$, $m = 161$ ($m \ne 4, 6, 7, 8, 24$). Во всех этих случаях экстремальная функция является многочленом, структура которого существенно зависит от значения m. Экстремальные многочлены имеют один из следующих четырех видов. В приводимых формулах через a_i обозначены (двойные) нули экстремального многочлена ($a_i = t_i$ — узлы функционала L), принадлежащие интервалу (0, 1/2). В этих формулах, как и всюду в дальнейшем, значение параметра $s = 1/2$.

1. $f(t) = (t^2 - s^2) \cdot \prod\limits_{i=1}^{K} (t^2 - a_i^2)^2$.
2. $f(t) = (t^2 - s^2) \cdot \prod\limits_{i=1}^{K} (t^2 - a_i^2)^2 \cdot t^2$.
3. $f(t) = (t^2 - s^2) \cdot \prod\limits_{i=1}^{K} (t^2 - a_i^2)^2 \cdot (t^4 + q\,t^2 + r), \quad f_{4K+2} = f_{4K+4} = 0$.
4. $f(t) = (t^2 - s^2) \cdot \prod\limits_{i=1}^{K} (t^2 - a_i^2)^2 \cdot (t^4 + q\,t^2 + r) \cdot t^2, \quad f_{4K+4} = f_{4K+6} = 0$.

Результаты работы сведены в приводимые ниже табл. 1, 2. В первом столбце указана размерность пространства, в третьем – количество K двойных нулей экстремальной функции на интервале $(0, 1/2)$, в четвертом – вид, а точнее, номер одного из четырех видов экстремальной функции, в пятом – степень получившегося многочлена. Во втором столбце указано полученное нами значение $w_m^A = w_m^A(1/2)$ — решение задачи Дельсарта.

Вид экстремальной функции, значения K, m и есть та информация, по которой составляется система уравнений, исходя из условий (a), (b), (c), указанных в разделе 2. Во всех рассмотренных в работе случаях количество уравнений и переменных в этой системе совпадает. Уравнения системы являются нелинейными, в связи с этим решение системы неединственное. Среди решений системы нужно выбрать то, которое дает функцию f^* и функционал L, удовлетворяющие условиям (d)–(f). Эти построения были проделаны нами для всех указанных значений m. Однако привести полное доказательство для каждого случая не представляется возможным в связи с громоздкостью соответствующих выкладок. Подробное доказательство будет приведено только для случая $m = 43$. Для остальных значений m построение системы, ее исследование и доказательство экстремальности полученных решений осуществляется аналогично.

Все аналитические преобразования и численные вычисления были проделаны нами с использованием пакета аналитических вычислений Maple.

4. Таблицы результатов

В табл. 1 приведены значения w_m^A в случае, когда экстремальным многочленом является многочлен вида 1 или 2 (т. е. многочлен Левенштейна). Как оценки максимальной мощности антиподального сферического 1/2-кода указанные значения были известны ранее (см. [7, с. 8]). В данной работе утверждается, что приведенные значения являются решением задачи (6) (при $s = 1/2$).

Таблица 1

m	w_m^A	K	Вид	Степень
4	24	0	2	4
5	42	0	2	4
6	72	0	2	4
7	126	0	2	4
8	240	0	2	4
9	$366\frac{12}{73}$	1	1	6
10	550	1	1	6
11	$820\frac{16}{23}$	1	1	6
12	$1228\frac{1}{2}$	1	1	6
13	$1867\frac{17}{19}$	1	1	6
14	2940	1	1	6
15	$4962\frac{6}{37}$	1	1	6
16	8160	1	2	8
17	$11478\frac{12}{13}$	1	2	8
18	$16122\frac{6}{7}$	1	2	8
19	22724	1	2	8
20	32340	1	2	8
21	$46879\frac{7}{17}$	1	2	8

Продолжение табл. 1

m	w_m^A	K	Вид	Степень
22	$70165\frac{1}{3}$	1	2	8
23	$111126\frac{6}{19}$	1	2	8
24	196560	1	2	8
25	$267628\frac{622}{1451}$	2	1	10
26	364182	2	1	10
27	$497035\frac{7}{281}$	2	1	10
28	683240	2	1	10
29	$951235\frac{31}{251}$	2	1	10
30	$1352089\frac{1}{71}$	2	1	10
31	$1987341\frac{15}{197}$	2	1	10
32	$3091334\frac{2}{5}$	2	1	10
34	7314012	2	2	12
35	$9768755\frac{475}{733}$	2	2	12
36	13090896	2	2	12
37	$17663588\frac{56}{135}$	2	2	12
38	$24107066\frac{2}{59}$	2	2	12
39	$33491675\frac{1}{49}$	2	2	12
40	$47830565\frac{5}{47}$	2	2	12
41	$71400259\frac{1}{179}$	2	2	12
42	115143336	2	2	12
44	238814520	3	1	14
45	$315542890\frac{610}{1271}$	3	1	14
46	$419023338\frac{46}{53}$	3	1	14
47	$561215167\frac{4037}{5461}$	3	1	14
48	$761656254\frac{6}{11}$	3	1	14
49	$1054475186\frac{8}{17}$	3	1	14
50	$1504942258\frac{16}{23}$	3	1	14
51	$2255135531\frac{583}{1363}$	3	1	14
55	$9437927703\frac{133}{229}$	3	2	16
56	$12438770728\frac{8}{43}$	3	2	16
57	$16538544622\frac{31216}{39785}$	3	2	16
58	$22282754713\frac{1}{23}$	3	2	16

Окончание табл. 1

m	w_m^A	K	Вид	Степень
59	$30616778153\frac{137891}{168533}$	3	2	16
60	43329012480	3	2	16
61	$64250386884\frac{27108}{41039}$	3	2	16
66	$350194168928\frac{6406}{8155}$	4	1	18
67	$461936954642\frac{6152}{63809}$	4	1	18
68	$616741349591\frac{433}{1237}$	4	1	18
69	$838108246881\frac{6081}{9829}$	4	1	18
70	1169132164200	4	1	18
71	$1698060388955\frac{28265}{298283}$	4	1	18
77	$12411939766938\frac{246}{511}$	4	2	20
78	$16405689281448\frac{24}{37}$	4	2	20
79	$22010329107332\frac{140248}{248905}$	4	2	20
80	$30177990957237\frac{17}{19}$	4	2	20
81	$42744922122472\frac{42898}{53507}$	4	2	20
82	$63758049542988\frac{64}{65}$	4	2	20
89	$561945080967167\frac{37795}{1048459}$	5	1	22
90	$757112348026609\frac{2267}{6637}$	5	1	22
91	$1045988435188294\frac{5400226}{9600141}$	5	1	22
92	$1501230731871410\frac{2}{257}$	5	1	22
112	$816451378740698787\frac{5}{9}$	6	1	26
113	$1136254535300176728\frac{151306698}{223651759}$	6	1	26
114	$1136254535300176728\frac{151306698}{223651759}$	6	1	26

В табл. 2 приведены вычисленные значения w_m^A в случае, когда экстремальным многочленом в задаче (6) (при $s = 1/2$) является многочлен вида 3 или 4. Эти значения могут быть использованы как новые, неулучшаемые с помощью метода Дельсарта, оценки максимальной мощности сферических $1/2$-кодов в $\mathbb{R}^m$.

Таблица 2

m	w_m^A	K	Вид	Степень
3	$12.8340776752\ldots$	1	3	10
33	$5203280.6707141049\ldots$	2	4	16
43	$170133239.5931416562\ldots$	3	3	18

Продолжение табл. 2

m	w_m^A	K	Вид	Степень
52	3506589575.3297508814...	3	4	20
53	4906979442.0645648056...	3	4	20
54	6965642842.5492071202...	3	4	20
62	95994610190.3413097554...	4	3	22
63	131582414832.0133343262...	4	3	22
64	182480513596.8192404599...	4	3	22
65	257327059360.7694099942...	4	3	22
72	2512477187944.7980147749...	4	4	24
73	3382770986274.7717090200...	4	4	24
74	4595841393803.8776672113...	4	4	24
75	6325468915069.0951433926...	4	4	24
76	8869434642969.6959845223...	4	4	24
83	84893140132749.4433303610...	5	3	26
84	113336757486228.6751081110...	5	3	26
85	152780346952246.4470059715...	5	3	26
86	208816888813525.1041282031...	5	3	26
87	291111233760547.9215716098...	5	3	26
88	417810824838712.4573733198...	5	3	26
93	2101339201083448.8581013596...	5	4	28
94	2765414429020562.7271354169...	5	4	28
95	3664279182837636.4124486346...	5	4	28
96	4903834748673690.9286701217...	5	4	28
97	6656234865994295.8866755890...	5	4	28
98	9219414667236866.7539438955...	5	4	28
99	13154452413669110.8651309899...	5	4	28
104	67128787164683544.4523776297...	6	3	30
105	87735771631740197.9352556672...	6	3	30
106	115452705604234426.2027477576...	6	3	30
107	153434175553796665.9933019243...	6	3	26
108	206786189887861292.3744524831...	6	3	30
109	284301510798701394.0821487141...	6	3	30
110	402436933410128596.4722278511...	6	3	30
111	595836902535559024.3188262687...	6	3	30
115	2101589801997124293.4926488050...	6	4	32
116	2729686255505205518.5715664555...	6	4	32
117	3568896545606734776.3884783889...	6	4	32

Окончание табл. 2

m	w_m^A	K	Вид	Степень
118	4710751164134714024.1028237957...	6	4	32
119	6302155682133310144.5379747181...	6	4	32
120	8593437376247698936.3526858911...	6	4	32
121	12046660361010217345.2333308572...	6	4	32
122	17615670890375383613.3569976086...	6	4	32
125	50364867085052138405.0507562145...	7	3	34
126	64793425556670001358.5275796370...	7	3	34
127	83682707580452106791.2097623968...	7	3	34
128	108746230244493146881.2976319596...	7	3	34
129	142584503530083915887.6303725657...	7	3	34
130	189322485836170786553.6385557962...	7	3	34
131	255885036015648050531.0181807358...	7	3	34
132	354803789323254565081.7957039872...	7	3	34
133	511236181565006961686.6864799904...	7	3	34
134	784028296517640221309.3273031865...	7	3	34
136	1541633134566897630439.9212931033...	7	4	36
137	1973936094367255380618.5869006801...	7	4	36
138	2536282160116347359248.0508958835...	7	4	36
139	3277120814346441078193.1926393845...	7	4	36
140	4269133305200474922172.0302255769...	7	4	36
141	5625976046648898147250.0406685544...	7	4	36
142	7535031448888363741834.1039332556...	7	4	36
143	10327388458447120861753.9448151515...	7	4	36
144	14645940302969237174125.6523056427...	7	4	36
145	21920980271484567377147.0958895900...	7	4	36
147	46712811159099187620845.3387817426...	8	3	38
148	59565056612990122680415.8493932533...	8	3	38
149	76177853174918430594445.5483347921...	8	3	38
150	97906064392590213580625.1938449228...	8	3	38
151	126755987190626475051892.3954775655...	8	3	38
152	165815400461133042447385.7661426883...	8	3	38
153	220073534234554737523908.4115945786...	8	3	38
154	298116449057161906517212.6325878034...	8	3	38
155	416023538135200368061705.0307527308...	8	3	38
156	607718608181858421565493.8445181846...	8	3	38
161	2904804593623115788824211.9075380435...	8	4	40

5. Доказательство для случая $m = 43$

Пусть $m = 43$. В этом случае $\alpha = 20$ и многочлены $R_k = R_k^{20,20}$ являются ультрасферическими многочленами, ортогональными на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-t^2)^{20}$ и нормированными условием $R_k(1) = 1$. В данном разделе будет вычислена величина

$$w_{43}^A = w_{43}^A(1/2) = \inf\left\{\frac{f(1)+f(-1)}{f_0} : \ f \in \mathcal{F}_{43}^A\right\}, \quad \mathcal{F}_{43}^A = \mathcal{F}_{43}^A(1/2). \tag{19}$$

В соответствии с таблицей результатов экстремальной функцией является четный многочлен восемнадцатой степени вида 3 с $K = 3$, у которого четырнадцатый и шестнадцатый коэффициенты разложения (3) по системе ультрасферических многочленов с четными номерами равны нулю, и, таким образом, экстремальный многочлен имеет вид

$$f^*(t) = \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) \cdot \prod_{i=1}^{3}(t^2 - a_i^2)^2 \cdot (t^4 + q\,t^2 + r), \quad f_{14}^* = f_{16}^* = 0. \tag{20}$$

Нам предстоит выбрать параметры этого многочлена, т. е. нули $\{a_i\}$ и коэффициенты q, r; при этом должны быть выполнены следующие два условия:

($c1$) (двойные) нули a_i, $1 \le i \le 3$, лежат на интервале $(0, 1/2)$;

($c2$) многочлен $t^4 + q\,t^2 + r$ неотрицателен на отрезке $[0, 1/2]$ (а на самом деле он будет положительным на всей числовой оси).

Одновременно с функцией (20) нам предстоит построить квадратурную формулу

$$f_0 = \frac{1}{\vartheta(\alpha)}\int_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)^{\frac{m-3}{2}}dt = L(f) - \gamma_{14}f_{14} - \gamma_{16}f_{16}, \tag{21}$$

$$L(f) = \sum_{i=1}^{3} A_i\, f(a_i) + A_0\, f\left(\frac{1}{2}\right) + A_4\, f\,(1)\,, \tag{22}$$

с такими свойствами:

($p1$) формула точна на множестве $\mathcal{P}_{18}^A$ четных алгебраических многочленов степени не выше 18;

($p2$) $L(R_{2k}) \ge 0$, $k \ge 0$, причем (как следствие предыдущего условия) $L(R_{2k}) = 0$, $1 \le k \le 9$, $k \ne 7$, 8;

($p3$) коэффициенты A_i, $0 \le i \le 4$, формулы (22) неотрицательные.

Число всех параметров здесь равно двенадцати, а именно пять коэффициентов A_i, три неизвестных a_i, два коэффициента многочлена $t^4 + q\,t^2 + r$ и два коэффициента γ_{14}, γ_{16}. Для отыскания этих параметров составляется система Σ_{12} двенадцати (нелинейных) уравнений: десять уравнений дает условие, что квадратурная формула (21) является точной на четных алгебраических полиномах восемнадцатой степени, т. е. условие ($p1$) и два уравнения дают условия, что коэффициенты f^*_{14}, f^*_{16} разложения искомого многочлена f^* по системе $\{R_{2k}\}$ равны нулю.

Для упрощения системы Σ_{12} использовались следующие соображения. В пространстве $\mathcal{P}^A_{18}$ был выбран базис многочленов, при подстановке которых в квадратурную формулу (21) получались наиболее простые уравнения. Кроме того, квадраты нулей a_i, $1 \le i \le 3$, многочлена (20) мы заменяем на их симметрические функции U_i, $1 \le i \le 3$, а точнее, многочлен $P_3(t) = \prod_{i=1}^{3}(t^2 - a_i^2)$, квадрат которого присутствует в разложении (20), мы ищем в виде

$$P_3(t) = t^6 - U_2 t^4 + U_1 t^2 - U_0.$$

Построенная на этом пути система Σ_{12} имеет несколько комплексных решений, и только одно из них удовлетворяет условиям ($c1$), ($c2$), ($p2$), ($p3$).

Построение системы и ее решение можно увидеть в доказательстве последующей теоремы и леммы 5.1. Система была решена нами с помощью пакета аналитических вычислений Maple. Мы не приводим эти построения и вычисления, а ограничиваемся тем, что приводим конкретную функцию (20) и квадратурную формулу (21) + (22), и доказываем, что они решают задачу.

Для формулировки дальнейших результатов понадобятся несколько определений и обозначений. Пусть H – следующий многочлен третей степени:

$$H(z) = z^3 - \frac{1835489}{2079100}\,z^2 + \frac{590059779}{1287046064}\,z - \frac{106321508304907}{2129617205027920}. \tag{23}$$

Он имеет один вещественный и два комплексных корня:

$$z_1 = 0.1411134854416294\ldots,$$
$$z_{2,3} = 0.3708575711650012\ldots \pm i \cdot 0.4650367196476447\ldots .$$

Условимся, что ниже z_1 многочлена H обозначается через ξ, так что

$$\xi = z_1 = 0.1411134854416294\ldots . \tag{24}$$

Положим

$$q = 2\,\xi - \frac{179}{100} = -1.5077730291167411\ldots,$$
$$r = 3\,\xi^2 - \frac{3914589}{1039550}\,\xi + \frac{40170654239}{32176151600} = 0.7768145246622512\ldots,$$

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= \frac{779}{1018759}\,\xi - \frac{5570}{53994227},\\ \zeta_1 &= \frac{1930}{20791}\,\xi - \frac{10605}{1101923},\\ \zeta_2 &= \xi.\end{aligned}\tag{25}$$

С помощью чисел $q, r, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ определим многочлен восемнадцатой степени

$$f^*(t) = \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\left(t^6 - \zeta_2\,t^4 + \zeta_1\,t^2 - \zeta_0\right)^2 (t^4 + q\,t^2 + r).\tag{26}$$

Обозначим через f_k^* коэффициенты Фурье в разложении многочлена f^* по системе многочленов $\{R_k\}$. Многочлен f^* является четным, поэтому коэффициенты с нечетными номерами равны нулю. Следовательно, разложение будет иметь вид

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{9} f_{2k}^* R_{2k}(t).\tag{27}$$

Пусть, наконец, $\{a_i\}_{i=1}^3$ суть положительные корни многочлена

$$g(z) = z^6 - \zeta_2\,z^4 + \zeta_1\,z^2 - \zeta_0;\tag{28}$$

все они лежат на интервале $(0, 1/2)$ и имеют такие приближенные значения:

$$\begin{aligned}a_1 &= 0.0380726602850886\ldots,\\ a_2 &= 0.1725867591939439\ldots,\\ a_3 &= 0.3314781569445825\ldots.\end{aligned}\tag{29}$$

В силу (26) точки $\pm a_i$, $1 \le i \le 3$, являются двойными нулями функции f^*.

Основным результатом данного раздела является следующая

Теорема 5.1. *Многочлен f^*, определенный с помощью формул* (23)–(26), *принадлежит множеству $\mathcal{F}_{43}^A$ и является единственной* (*с точностью до постоянного положительного множителя*) *экстремальной функцией* (*решением*) *задачи* (19); *кроме того, справедливы равенства*

$$w_{43}^A = \frac{2f^*(1)}{f_0^*} = 170133239.5931416562399728\ldots\ .\tag{30}$$

Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

Для ультрасферических многочленов $R_n = R_n^{\alpha,\alpha}$, $\alpha = (m-3)/2$ при любом $m \geq 2$ и, в частности, при $m = 43$ имеет место рекуррентная формула (см., например, [6, с. 64, формула (4.5)])

$$R_{n+1}(t) = \frac{(2n+m-2)\,t\,R_n(t) - n\,R_{n-1}(t)}{n+m-2}, \quad n \geq 1,$$
$$R_0(t) = 1, \quad R_1(t) = t.$$

Этой формулой удобно пользоваться для вычисления коэффициентов многочленов R_n, $n \geq 1$, в их представлении по степеням переменного t. В дальнейшем нам несколько раз нужно будет разлагать некоторый многочлен $f(t) = \sum_{k=0}^{\nu} c_k(f)t^k$ степени ν по системе $\{R_k\}$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\nu} f_k R_k(t). \tag{31}$$

Мы осуществляем это по следующей хорошо известной схеме. Пусть $c_\nu(R_\nu)$ – старший коэффициент многочлена R_ν. Тогда в разложении (31) имеем $f_\nu = c_\nu(f)/c_\nu(R_\nu)$. Степень многочлена $f^1 = f - f_\nu R_\nu$ равна $\nu - 1$. Повторяя эту процедуру для многочлена f^1, получаем коэффициент $f_{\nu-1}$ и т. д.

С помощью многочлена (28) определим многочлены

$$g^i(t) = (t^2 - 1/4)(t^2 - 1)\,g(t)/(t^2 - a_i^2) \quad i = 1,\ 2,\ 3; \tag{32}$$

в дальнейшем нам понадобится обозначение коэффициентов их разложений

$$g^i(t) = \sum_{j=0}^{9} g_{2j}^i\, R_{2j}(t) \tag{33}$$

по системе ультрасферических многочленов. Введем величины

$$\lambda(a_i) = g_0^i/g^i(a_i), \quad i = 1,\ 2,\ 3; \tag{34}$$

они имеют следующие численные значения:

$$\begin{aligned} \lambda(a_1) &= 0.4835866972149467\ldots, \\ \lambda(a_2) &= 0.4319241073046564\ldots, \\ \lambda(a_3) &= 0.0815919008616610\ldots. \end{aligned} \tag{35}$$

Положим еще

$$\lambda(1) = -\frac{1}{23009085}\left(\frac{214703\,\xi - 24075}{24221\,\xi - 26423}\right) = 0.00000001175549\ldots, \tag{36}$$

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{928514048}{90945}\left(\frac{53\,\xi - 15}{138423916\,\xi - 46036387}\right) = 0.002897282863\ldots. \tag{37}$$

Доказательство теоремы 5.1 основано на квадратурной формуле на множестве функций (11) при $m = 43$, содержащейся в следующем утверждении.

Лемма 5.1. *Для функций* $f(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_{2j} R_{2j}(t) \in \Phi_{43}^{A}$ *имеет место квадратурная формула*

$$f_0 = \frac{1412926920405}{549755813888} \int_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)^{\frac{43-3}{2}} dt = L(f) - \sum_{\nu \geq 1} L(R_{2\nu}) f_{2\nu}; \qquad (38)$$

в этой формуле L *есть функционал*

$$L(f) = \lambda(1) f(1) + \lambda\left(\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{i=1}^{3} \lambda(a_i) f(a_i), \qquad (39)$$

коэффициенты которого определены формулами (34)–(37)*. Функционал* L *обладает свойствами*

$$L(1) = 1; \qquad (40)$$

$$L(R_{2\nu}) = 0, \quad \nu = 1,\ 2, \ldots,\ 5,\ 6,\ 9; \qquad (41)$$

$$L(R_{2\nu}) > 0, \quad \nu = 7,\ 8,\ \nu \geq 10. \qquad (42)$$

Доказательство леммы будет осуществлено с помощью рассуждений, подобных тем, которые применялись в работе [12] для доказательства леммы 4.2 при исследовании величины $w_4(1/2)$.

Вначале найдем условия на вещественные узлы

$$0 < A_1 < A_2 < A_3 < \frac{1}{2} \qquad (43)$$

и коэффициенты $\lambda_1,\ \lambda_{1/2},\ \lambda_{A_1},\ \lambda_{A_2},\ \lambda_{A_3},\ \gamma_{14},\ \gamma_{16}$, необходимые для существования квадратурной формулы

$$f_0 = \frac{1412926920405}{549755813888} \int_{-1}^{1} f(t) \cdot (1-t^2)^{\frac{43-3}{2}} dt = \mathcal{L}(f) - \gamma_{14} f_{14} - \gamma_{16} f_{16}, \qquad (44)$$

$$\mathcal{L}(f) = \lambda_1 f(1) + \lambda_{1/2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_{A_i} f(A_i), \qquad (45)$$

на множестве всех четных многочленов $f(t) = \sum_{k=0}^{9} f_{2k} R_{2k}(t)$ степени не выше 18. Затем к этим условиям добавим еще несколько условий с тем, чтобы полученный набор стал достаточным для построения нужной нам квадратурной формулы уже на множестве Φ^A_{43}.

Положим

$$\chi(t) = \prod_{i=1}^{3}(t^2 - A_i^2) = t^6 - U_2\, t^4 + U_1\, t^2 - U_0. \tag{46}$$

Рассмотрим многочлен десятой степени

$$\sigma(t) = (t^2 - 1)\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\chi(t). \tag{47}$$

С помощью этого многочлена введем еще несколько алгебраических многочленов (степени не выше 18). Пусть $\varphi^1 = \sigma$ и

$$\varphi^1(t) = \sum_{k=0}^{9} \varphi^1_{2k} R_{2k}(t)$$

есть разложение этого многочлена по системе $\{R_k\}_{k=0}^{\infty}$. На самом деле степень этого многочлена равна 10 и потому $\varphi^1_{14} = \varphi^1_{16} = 0$. Нас интересует коэффициент разложения при R_0; для него верна следующая формула:

$$\varphi^1_0 = -\frac{29}{141470}\, U_2 + \frac{49}{12126}\, U_1 - \frac{287}{1290}\, U_0 + \frac{23}{1442994}.$$

Аналогично для многочлена $\varphi^2(t) = t^2\sigma$ имеем

$$\varphi^2_0 \;=\; -\frac{23}{1442994}\, U_2 + \frac{29}{141470}\, U_1 - \frac{49}{12126}\, U_0 + \frac{1}{642678}.$$

Подставив многочлены φ^1, φ^2 в формулу (44), получаем первое необходимое условие существования этой формулы:

$$\varphi^1_0 = 0, \quad \varphi^2_0 = 0.$$

Последние соотношения дают систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} -\frac{29}{141470}\, U_2 + \frac{49}{12126}\, U_1 - \frac{287}{1290}\, U_0 + \frac{23}{1442994} &= 0,\\ -\frac{23}{1442994}\, U_2 + \frac{29}{141470}\, U_1 - \frac{49}{12126}\, U_0 + \frac{1}{642678} &= 0, \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{779}{1018759}\, U_2 - \frac{5570}{53994227},\\ U_1 &= \frac{1930}{20791}\, U_2 - \frac{10605}{1101923}. \end{aligned} \tag{48}$$

Рассмотрим многочлен $\varphi^3(t) = t^4\sigma(t)$; он имеет четырнадцатую степень. Для коэффициентов разложения этого многочлена по системе ультрасферических многочленов справедливы формулы

$$\varphi_0^3 = -\frac{1}{642678}\,U_2 + \frac{23}{1442994}\,U_1 - \frac{29}{141470}\,U_0 + \frac{3}{18209210},$$

$$\varphi_{14}^3 = \frac{847872}{4581527}, \quad \varphi_{16}^3 = 0.$$

Подставляя многочлен φ^3 в формулу (44), получаем

$$\varphi_0^3 = -\gamma_{14}\,\varphi_{14}^3, \tag{49}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned}\gamma_{14} = \frac{4581527}{544908681216}\,U_2 - \frac{4581527}{53194530816}\,U_1 + \\ + \frac{132864283}{119948451840}\,U_0 - \frac{4581527}{5146359767040}.\end{aligned} \tag{50}$$

Аналогично, используя многочлен шестнадцатой степени $\varphi^4(t) = t^6 \cdot \sigma(t)$ и выражение для γ_{14} из (50), находим коэффициент γ_{16} :

$$\begin{aligned}\gamma_{16} = \frac{325288417}{24323459973120}\,{U_2}^2 - \frac{7481633591}{54613051637760}\,U_1U_2 + \\ + \frac{9433364093}{5354220748800}\,U_0U_2 - \frac{543272890133}{115779669472051200}\,U_1 - \\ - \frac{19925060923}{31207458078720}\,U_0 - \frac{114538175}{19458767978496}\,U_2 + \frac{39304679}{78761679912960}.\end{aligned} \tag{51}$$

Введем многочлены

$$h_i(t) = \sigma(t)/(t^2 - (a_i)^2), \quad 1 \le i \le 3,$$

$$h_4(t) = \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\chi(t) = \sigma(t)/(t^2 - 1),$$

$$h_5(t) = (t^2 - 1)\chi(t) = \sigma(t)/(t^2 - 1/4).$$

Подставляя многочлены h_4, h_5 в формулу (44), получаем

$$\lambda_1 = -\frac{1}{636615}\,\frac{189\,U_2 - 3619\,U_1 + 192465\,U_0 - 15}{U_2 - U_1 + U_0 - 1},$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{512}{636615}\,\frac{147\,U_2 - 2303\,U_1 + 103635\,U_0 - 15}{4\,U_2 - 16\,U_1 + 64\,U_0 - 1}.$$

Подставляя в формулы для λ_1, $\lambda_{1/2}$ выражения U_0, U_1 из (48), получаем

$$\lambda_1 = -\frac{1}{23009085}\,\frac{214703\,U_2 - 24075}{24221\,u_2 - 26423}, \tag{52}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{928514048}{90945}\,\frac{53\,U_2 - 15}{138423916\,U_2 - 46036387}. \tag{53}$$

Аналогичным образом с помощью многочленов h_i, $1 \le i \le 3$, находим формулы

$$\lambda_{A_i} = h_0^i / h^i(A_i), \ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{54}$$

В связи с громоздкостью выражений развернутые формулы для коэффициентов λ_{A_i} мы здесь не приводим.

Подставляя многочлен $\varphi^5(t) = t^8\sigma(t)$ в формулу (44) и учитывая полученные выше формулы для $\gamma_{14}, \gamma_{16}, U_0, U_1$, приходим к следующему уравнению:

$$F(U_2) = 0, \tag{55}$$

в котором

$$F(U_2) = {U_2}^3 - \frac{1835489}{2079100}\,{U_2}^2 + \frac{590059779}{1287046064}\,U_2 - \frac{106321508304907}{2129617205027920}. \tag{56}$$

Многочлен $F(U_2)$ совпадает с многочленом H. Таким образом, условие $H(U_2) = 0$ и условия (48), (50)–(54) являются необходимыми для того, чтобы существовала квадратурная формула (44).

Как уже отмечалось выше, многочлен H имеет один вещественный и два комплексных корня; в (24) мы обозначили через ξ его вещественный корень.

С данного момента предполагается, что

$$U_2 = \zeta_2 = \xi, \ U_1 = \zeta_1, \ U_0 = \zeta_0,$$

где ζ_0, ζ_1, ζ_2 заданы формулами (25).

При этом предположении многочлен χ, заданный формулой (46), совпадает с многочленом (28) и, следовательно,

$$A_i = a_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{57}$$

Отсюда вытекает, что коэффициенты $\lambda_1, \lambda_{1/2}, \lambda_{A_1}, \lambda_{A_2}, \lambda_{A_3}$ функционала $\mathcal{L}$ (см. (45)) совпадают с коэффициентами (34)–(37) функционала L, определенного в (39). Следовательно, формула (44) примет вид

$$f_0 = \frac{1412926920405}{549755813888}\int_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)^{\frac{43-3}{2}}dt = L(f) - \gamma_{14}f_{14} - \gamma_{16}f_{16}. \tag{58}$$

На данном этапе рассуждений можно утверждать, что эта формула выполняется на многочленах $h^1,\ h^2,\ \ldots,\ h^5,\ \varphi^1,\ \varphi^2,\ \ldots,\ \varphi^5$. Указанные десять многочленов образуют базис во множестве $\mathcal{P}_{18}^A$ четных многочленов не выше восемнадцатой степени. Поэтому квадратурная формула (58) верна для любого многочлена из $\mathcal{P}_{18}^A$. Подставив в нее многочлены $R_{14},\ R_{16}$, получим

$$\gamma_{14} = L(R_{14}), \quad \gamma_{16} = L(R_{16}). \tag{59}$$

Следовательно, формулу (58) можно переписать в такой форме:

$$f_0 = \frac{1412926920405}{549755813888} \int_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)^{\frac{43-3}{2}} dt = L(f) - \sum_{\nu=7}^{8} L(R_{2\nu}) f_{2\nu}, \tag{60}$$

где

$$L(R_\nu) = \lambda(1) + \lambda\left(\frac{1}{2}\right) R_\nu\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{i=1}^{3} \lambda(a_i) R_\nu(a_i), \tag{61}$$

$a_1,\ a_2,\ a_3$ – положительные корни многочлена, заданного формулой (28).

Отсюда, в частности, следует, что $L(R_{2\nu}) = 0$ при $\nu = 1, 2, \ldots, 5, 6, 9$, $\nu \neq 7, 8$, т. е. имеет место свойство (41). Подставив в формулу (60) многочлен $f(t) \equiv 1$, получаем также утверждение (40).

Очевидно, формулу (60) можно распространить на весь класс функций Φ_{43}^A, если записать ее в форме (38).

Для завершения доказательства осталось проверить неравенства (42). Для обоснования этих неравенств воспользуемся следующими двумя свойствами ультрасферических многочленов $\{R_k\}$:

1) $R_\nu(1) = 1,\ R_\nu(-1) = (-1)^\nu,\ \nu \geq 0$;

2) многочлены R_ν на интервале $(-1, 1)$ поточечно стремятся к нулю при $\nu \to \infty$, а точнее, для них выполняются оценки (62).

При любом $\nu \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} L\left(R_\nu\right) &\geq \lambda(1) + \left(\lambda\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{i=1}^{3} \lambda(a_i)\right) \min\left\{R_\nu\left(\frac{1}{2}\right), R_\nu(a_1), \ldots, R_\nu(a_3)\right\} = \\ &= \lambda(1) + (1-\lambda(1)) \min\left\{R_\nu\left(\frac{1}{2}\right), R_\nu(a_1), R_\nu(a_2), R_\nu(a_3)\right\} \geq \\ &\geq \lambda(1) - (1-\lambda(1)) \max\left\{\left|R_\nu\left(\frac{1}{2}\right)\right|, \left|R_\nu(a_1)\right|, \left|R_\nu(a_2)\right|, \left|R_\nu(a_3)\right|\right\}. \end{aligned}$$

Воспользуемся следующими эффективными оценками для ультасферических многочленов:

$$|R_n^{\alpha,\alpha}(t)| \leq \frac{A(n,m)}{(1-t^2)^\gamma}, \quad \alpha = (m-3)/2, \quad -1 < t < 1, \tag{62}$$

$$n \geq \max\{3, m-4\}, \quad m \geq 4,$$
$$A(n,m) = \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})^{m-4}}{(n+1)^{\frac{m-2}{2}}}, \quad \gamma = \frac{m-2}{4}. \tag{63}$$

Оценки многочленов Якоби и, в частности, ультрасферических многочленов, имеют богатую историю; оценка (62) содержится в [16, лемма 2.1].

По условию леммы оценку (62) можно использовать при $n \geq 39$. Вспомним, что $a_i \in (0, 1/2)$, поэтому для любого $\nu \geq 1$ справедлива оценка

$$\max\left\{\left|R_\nu\left(\frac{1}{2}\right)\right|, |R_\nu(a_1)|, |R_\nu(a_2)|, |R_\nu(a_3)|\right\} \leq$$
$$\leq \frac{\Gamma(21)\sqrt{2}(2+\sqrt{2})^{39}}{(1-1/4)^{\frac{41}{4}}\cdot(\nu+1)^{\frac{41}{2}}} \leq \frac{10^{42}}{(\nu+1)^{\frac{41}{2}}}.$$

Отсюда легко получить, что $L(R_\nu) > 0$ при $\nu \geq 2000$. Для оставшегося набора значений ν условия (42) проверяются непосредственными вычислениями с использованием программы Maple. Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. *Функция f^*, определенная с помощью соотношений* (23)–(26), *принадлежит множеству $\mathcal{F}_{43}^A$.*

Доказательство. В правой части (26) многочлен $\pi_2(t) = t^4 + q\,t^2 + r$ положителен на отрезке $[-1, 1]$. Поэтому

$$f^*(t) \leq 0, \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}. \tag{64}$$

Осталось доказать, что в разложении (27) функции (26) коэффициенты f_{2k}^* неотрицательные, причем $f_0^* > 0$. Вычисления дают следующие значения коэффициентов разложения функции

$$f^*(t) = \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\left(t^6 - \zeta_2\,t^4 + \zeta_1\,t^2 - \zeta_0\right)^2\left(t^4 + q\,t^2 + r\right)$$

по системе ультрасферических многочленов:

$$\begin{aligned} f_{18}^* &= \frac{439025664}{6248961695}, \\ f_{16}^* &= f_{14}^* = 0\,, \\ f_{12}^* &= 0.041763621157998272034926\ldots, \\ f_{10}^* &= 0.0292289140950023331221331\ldots, \\ f_8^* &= 0.0078138941286457485943531\ldots, \\ f_6^* &= 0.0009446460463425510583249\ldots, \end{aligned} \tag{65}$$

$$f_4^* = 0.000048808087481830964 5154\ldots,$$
$$f_2^* = 0.000000824201749181635 8353\ldots,$$
$$f_0^* = 0.000000001763987890762 6135\ldots.$$

Таким образом, разложение (3) функции f^* имеет неотрицательные коэффициенты и $f_0^* > 0$. Лемма 5.2 доказана.

Следующая лемма позволит показать, что функция f^* является единственной (с точностью до постоянного положительного множителя) экстремальной функцией задачи (19).

Лемма 5.3. *Допустим, что f есть четный многочлен не выше восемнадцатой степени со свойствами:*

1) *для f справедливо представление*

$$f(t) = h(t)e(t), \tag{66}$$

где

$$h(t) = \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\prod_{i=1}^{3}(t^2 - a_i^2)^2,$$

а e – некоторый четный многочлен не выше четвертой степени,

2) *в разложении*

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{18} f_\nu R_\nu(t) \tag{67}$$

многочлена f по многочленам R_k равны нулю четырнадцатый и шестнадцатый коэффициенты:

$$f_{14} = 0, \quad f_{16} = 0. \tag{68}$$

Тогда многочлен f с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией (многочленом) f^*, т. е. $f = cf^*$, где $c =$ const; при этом, если $f \in \mathcal{F}_{43}^A$, то $c > 0$.

Доказательство леммы проведем в несколько этапов.

1) Допустим вначале, что многочлен e в представлении (66) имеет вид

$$e(t) = t^4 + e_1 t^2 + e_0. \tag{69}$$

Выпишем явные выражения коэффициентов f_{14} и f_{16} в представлении (67) многочлена f. Нетрудно убедиться , что

$$f(t) = f_{18}R_{18}(t) + f_{16}R_{16}(t) + f_{14}R_{14}(t) + \varphi(t), \tag{70}$$

где

$$f_{18} = \frac{439025664}{6248961695},$$

$$f_{16} = -\frac{75694080}{325288417}\,\xi + \frac{37847040}{325288417}\,e_1 + \frac{338731008}{1626442085},$$

$$\begin{aligned} f_{14} \;\; &= \;\; -\frac{3372580030464}{6763071477847}\,\xi + \frac{847872}{4581527}\,\xi^2 + \frac{847872}{4581527}\,e_0 + \\ &+ \;\; \frac{86694912}{325288417}\,e_1 - \frac{1695744}{4581527}\,e_1\xi + \frac{6437476926996480}{26166323547790043}, \end{aligned}$$

и, наконец, φ есть некоторый четный многочлен двенадцатой степени.

Наложим на функцию f условия (68), т. е. приравняем правые части двух последних соотношений к нулю. В результате получим систему двух линейных уравнений относительно двух неизвестных e_1 и e_0. Определитель Δ этой системы имеет следующее выражение:

$$\Delta = -\frac{5238139265263337472 0}{1299065844351175880963} + \frac{391631316889632768 0}{245106763085127524 71}\,\xi - \frac{2595980574720}{16604338082711}\,\xi^2.$$

Отсюда с помощью (24) легко заключить, что $\Delta = -0.0208885275\ldots \neq 0$. Следовательно, рассматриваемая нами система, т. е. система двух условий (68), имеет единственное решение e_0, e_1. В силу (26) функция f^* имеет представление (66), (69) и, согласно (65), для нее выполняются условия (68). Отсюда следует, что $e_1 = q$ и $e_0 = r$. Таким образом, $f = f^*$ есть единственная функция, удовлетворяющая требованиям (66), (69) и (68).

2) Предположим, что в представлении (66) функции f многочлен e имеет вид $e(t) = ct^4 + e_1\,t^2 + e_0$ и при этом $c \neq 0$. Тогда функция $f_c = \dfrac{f}{c}$ удовлетворяет всем условиям леммы и в ее представлении (66) второй множитель имеет вид (69). Отсюда, как мы только что показали, следует, что $\dfrac{f}{c} = f^*$ или, что то же самое, $f = cf^*$. Ясно, что если $f \in \mathcal{F}_{43}^A$, то $c > 0$.

3) Наконец, покажем, что если для функции f выполняются условия леммы и в соотношении (66) второй множитель имеет вид $e(t) = e_1\,t^2 + e_0$, то $f \equiv 0$. Действительно, функция $\overline{f} = f^* + f$ удовлетворяет всем предположениям леммы. Для этой функции справедлива формула $\overline{f} = h\overline{e}$, в которой $\overline{e}$ есть многочлен четвертой степени $\overline{e}(t) = t^4 + \overline{e}_1\,t^2 + \overline{e}_0$ с коэффициентами $\overline{e}_1 = q + e_1$, $\overline{e}_0 = r + e_0$. Многочлен $\overline{e}$ имеет вид (69). Отсюда, как уже доказано, следует, что $\overline{f} = f^*$, а потому $f \equiv 0$. Лемма 5.3 доказана полностью.

Доказательство теоремы 5.1. Для функции f^*, определенной соотношениями (26), (27), выполняются свойства

$$f^*\left(\frac{1}{2}\right) = f^*(a_1) = f^*(a_2) = f^*(a_3) = 0, \quad f^*_{14} = f^*_{16} = 0.$$

Поэтому на ней формула (38) превращается в равенство

$$f_0^* = \lambda(1) f^*(1),$$

из которого следует, что

$$\frac{f^*(1)}{f_0^*} = \frac{1}{\lambda(1)} = -23009085 \left(\frac{24221\,\xi - 26423}{214703\,\xi - 24075} \right).$$

В силу леммы 5.2 функция f^* принадлежит множеству $\mathcal{F}_{43}^A$ и, следовательно,

$$w_{43}^A \le \frac{2}{\lambda(1)} = \frac{2 \cdot f^*(1)}{f_0^*}.$$

Таким образом, для доказательства (30) достаточно показать, что

$$w_{43}^A \ge \frac{2}{\lambda(1)}. \qquad (71)$$

Для произвольной функции $f \in \mathcal{F}_{43}^A$ справедлива квадратурная формула (38)–(39). Коэффициенты $\lambda(1), \lambda\left(\frac{1}{2}\right), \lambda(a_1), \lambda(a_2), \lambda(a_3)$ этой формулы положительные, а коэффициенты $L(R_{2\nu})$, $\nu \ge 1$, неотрицательные. В силу свойств (3)–(5) функции $f \in \mathcal{F}_{43}^A$ отсюда следует оценка

$$f_0 = L(f) - \sum_{\nu \ge 1} L(R_{2\nu}) f_{2\nu} \le \lambda(1) f(1), \qquad (72)$$

которая влечет неравенство (71). Этим обосновано утверждение (30) и одновременно доказано, что функция f^* является экстремальной в задаче (19).

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что с точностью до положительного множителя функция f^* является единственной экстремальной. Четная функция

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{2\nu} R_{2\nu}(t) \in \mathcal{F}_{43}^A \qquad (73)$$

является экстремальной в том и только в том случае, если на ней неравенство (72) обращается в равенство. В силу свойства (42) для этого необходимо, чтобы в представлении (73) экстремальной функции f коэффициенты $f_{2\nu}$ с номерами $\nu \ne 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 6,\ 9$ были равны нулю; в частности, это означает, что функция f есть многочлен не выше восемнадцатой степени. Кроме того, должно выполняться равенство $L(f) = \lambda(1) f(1)$, эквивалентное тому, что

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 0.$$

Таким образом, точка 1/2 должна быть по крайней мере простым нулем многочлена f, а точки a_1, a_2, a_3 должны быть по крайней мере двойными нулями этого многочлена. Следовательно, f имеет вид

$$f(t) = h(t)e(t), \tag{74}$$

где

$$h(t) = \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) \prod_{i=1}^{3} (t^2 - a_i^2)^2,$$

а e – некоторый четный многочлен не выше четвертой степени. Отсюда в силу леммы 5.3 следует, что $f = cf^*$, где c – некоторая положительная константа. Теорема 5.1 доказана.

Автор выражает благодарность В. В. Арестову за постановку интересной задачи, внимание к работе и помощь в подготовке статьи, а также А. Г. Бабенко за постоянный интерес к проводимым автором исследованиям.

Литература

1. Delsarte Ph. Bounds for unrestricted codes, by linear programming // Philips Res. Rep. 1972. Vol. 27. P. 272–289.
2. Дельсарт Ф. Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1976.
3. Кабатянский Г. А., Левенштейн В. И. О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Проблемы передачи информации. 1978. Т. 14, вып. 1. С. 3–25.
4. Odlyzko A. M., Sloane N. J. A. New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions // J. Combinatorial Theory. 1979. Ser. A. Vol. 26. P. 210–214.
5. Левенштейн В. И. О границах для упаковок в n-мерном евклидовом пространстве // ДАН СССР. 1979. Т. 245. С. 1299–1303.
6. Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. 1983. Т. 40. С. 44–110.
7. Levenshtein V. I. Designs as maximum codes in polynomial metric spaces // Acta Applicandae Math. 1992. Vol. 25. P. 1–83.
8. Сидельников В. М. Об экстремальных многочленах, используемых при оценках мощности кода // Проблемы передачи информации. 1980. Т. 16, вып. 3. С. 17–30.
9. Андреев Н. Н., Юдин В. А. Арифметический минимум квадратичной формы и сферические коды // Матем. просвещение (третья серия). Вып. 2. С. 133–140.

10. Boyvalenkov P. G. Non existance of certain symmetrical codes // Designs, Codes, Cryptography. 1993. Vol. 3, № 1. P. 69–74.

11. Boyvalenkov P. G., Danev D. P., Bumova S. P. Upper bounds on the minimum distance of spherical codes // IEEE Transactions on Information Theory. 1996. Vol. 42, № 5. P. 1576–1581.

12. Арестов В. В., Бабенко А. Г. О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1997. Т. 219. С. 44–73.

13. Арестов В. В., Бабенко А. Г. Оценки углового кодового расстояния для 24 и 25 точек на единичной сфере в $\mathbb{R}^4$ // Матем. заметки. 2000. Т. 68, вып 4. С. 483–503.

14. Бойваленков П. Г., Данев Д. П. О границах линейного программирования для кодов в полиномиальных метрических пространствах // Проблемы передачи информации. 1998. Т. 34, № 2. С. 16–31.

15. Арестов В. В., Бабенко А. Г., Дейкалова М.В. Задача Дельсарта, связанная со сферическим 1/3 кодом в евклидовом пространстве размерности 4, 5, 6 // Тр. Международ. шк. С. Б Стечкина по теории функций. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. С. 5–37.

16. Shtrom D. V. The Delsarte method in the problem on the contact numbers of euclidean spaces of high dimensions // Proc. Steklov Inst. of Mathematics. Suppl. 2. 2002. P. 162–189.

17. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990. Т. 1, 2.

18. Boyvalenkov P. G., Danev D. P., Mitradjieva M. Linear programming bounds for codes in infinite projective spaces // J. Geometry. Vol. 66, №1–2. P. 42–54.

19. Delsarte P., Goethalts J. M., Seidel J. J. Spherical codes and designs // Geom. Dedic. 1977. Vol. 6. P. 363–388.

20. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971.

Статья поступила 04.05.2003 г.